

校正源方位存在偏差时的幅相误差顽健校正算法

王鼎, 姚晖, 吴瑛

(解放军信息工程大学 信息工程学院, 河南 郑州 450002)

摘要: 针对校正源方位偏差会影响幅相误差校正精度这一问题, 在假设校正源方位偏差的概率分布已知的条件下, 依据子空间拟合准则和 Bayesian 估计理论框架, 给出了一种抑制校正源方位偏差的幅相误差顽健校正算法。该算法可在无需估计校正源方位的情况下, 通过计算某实对称矩阵最小特征值对应的特征向量获得幅相误差的顽健估计。推导了参数估计的 CRB(Cramer-Rao bound), 分析了顽健算法的渐近性能以及 Cheng 方法在校正源方位有偏差时的渐近性能。理论分析和仿真实验均表明: 在一定条件下, 所提出的算法的渐近性能可达到 CRB, 并且优于 Cheng 方法的渐近性能(当校正源方位有偏差时)。

关键词: 有源校正; 幅相误差; 子空间拟合; Bayesian 估计; 特征向量; 克拉美罗界

中图分类号: TN911.7

文献标识码: A

文章编号: 1000-436X(2012)06-0180-11

Robust algorithm for gain-and-phase errors estimation against the direction deviations of calibration sources

WANG Ding, YAO Hui, WU Ying

(Institute of Information Engineering, PLA Information Engineering University, Zhengzhou 450002, China)

Abstract: The direction deviations of the calibration sources would significantly degrade the calibration accuracy of array gain-and-phase errors. Aiming to this problem, a robust calibration algorithm for gain-and-phase errors against the location deviations was presented under the assumption that the prior probability distribution of the location deviation was known. The idea of the robust algorithm was based on subspace fitting criterion and Bayesian estimation theory framework. The gain-and-phase errors were obtained through calculating the eigenvector associated with the minimum eigenvalue of some real symmetric matrix without estimating the locations of calibration sources. The closed-form Cramér-Rao bound(CRB) for the unknown parameters was derived, and the asymptotic distributions of the robust algorithm as well as the Cheng method were also given in the presence of direction deviations. Both the theory analysis and the simulation experiments validate that the asymptotic performance of the robust algorithm can reach the CRB under some moderate conditions and outperform the Cheng method when the location deviations exist.

Key words: active calibration; gain-and-phase errors; subspace fitting; Bayesian estimation; eigenvector; Cramér-Rao bound

1 引言

众所周知, 基于特征空间和最大似然(ML)方法的超分辨率波达方向(DOA)估计算法会受到阵列误

差的影响^[1~3], 因此阵列误差校正引起了人们的广泛研究兴趣。在该领域中, 一类重要的研究方向是将阵列误差校正问题转化为参数估计问题, 而这种参数化的阵列误差校正方法又可分为 2 大类: 第 1 类

收稿日期: 2010-11-30; 修回日期: 2011-07-20

基金项目: 信息工程大学博士研究生学位论文创新基金资助项目 (BSLWCX200801)

Foundation Item: The PhD Degree Thesis Innovation Fund of Information Engineering University (BSLWCX200801)

是有源校正方法^[4~7], 即利用方位已知的校正源对阵列误差参数进行离线估计; 第 2 类是自校正方法^[8~12], 即依据某种准则将信源方位和阵列误差参数进行联合优化, 可在估计信源方位的同时完成阵列误差的在线估计。虽然 2 类方法各有优势, 但相比而言, 有源校正能够获得更高的校正精度, 这是因为在自校正方法中, 较多的未知参量会导致 CRB 的增加, 并且联合优化对应的多模非线性函数很难保证优化算法的全局收敛性, 更为重要的是, 信源方位和阵列误差参数之间往往相互耦合, 使得自校正中参数估计的可辨识性比有源校正更难得到保证^[10,13], 本文主要讨论有源校正方法。

在各种阵列误差中, 幅相误差是最常见的一种误差形式, 根据是否依赖信源方位变化, 可将其分为“方位依赖幅相误差^[14]”和“不依赖方位的幅相误差”, 本文主要针对后者进行讨论, 而在该领域中已有很多文献报道。例如, Weiss^[9]等人提出了一种基于特征空间的幅相误差自校正算法, 王布宏^[11]等人提出了一种多径条件下基于均匀线阵(ULA)的幅相误差自校正算法, 由于这 2 种算法都涉及到求解多模非线性优化问题, 因此局部收敛是它们需要克服的问题。此外, 针对 ULA 流型的 Vandermode 特性, 韩芳明^[8]等人提出了一种无需迭代的幅相误差自校正算法, 李有明^[12]等人对该算法进行了改进, 并给出一种性能更优的方法。尽管它们都可以避免迭代运算, 但是该类方法要求信源统计独立, 此外, 为了克服 ULA 中信源方位和阵列相位误差之间的参数耦合问题, 通常需要增加辅助阵元^[15,16]或方位已知的外置信源。为了避免自校正方法中的缺点, 学者们提出了很多幅相误差有源校正算法。例如, Fuhrman^[4]提出了一种基于 ML 准则的幅相误差有源校正算法, 其中假设理想阵列协方差阵已知。Soon^[5]等人提出了一种基于子空间的幅相误差有源校正方法(文中称为 Soon 方法), 该方法通过计算某 Hermite 矩阵的特征向量获得幅相误差估计。Cheng^[6]等人基于子空间拟合理论, 提出了一种基于噪声子空间拟合的幅相误差估计方法(文中称为 Cheng 方法), 该方法也是通过计算某 Hermite 矩阵的特征向量获得幅相误差估计, 但相比 Soon 方法, 它可获得渐近最优估计, 并且在高斯随机信源条件下, 其渐近性能可达到 CRB。需要指出的是, 上述有源校正方法都未针对校正源方位有偏差的情况进行深入讨论, 但在实际工程应用中, 校正源方位

偏差是难以避免的。一种最直接的处理方式是利用估计出的幅相误差修正流型向量, 并通过超分辨率算法重新估计校正源方位, 再利用方位的估计值更新幅相误差, 按照此过程反复迭代直至收敛。这种处理方式趋于将有源校正问题转化为自校正问题, 难免出现自校正方法中的一些缺点。由于校正源是人们主动放置的, 因此校正源方位偏差尽管难以避免但却可以得到一定控制, 因此不妨假设校正源方位偏差较小并且先验分布已知, 于是可根据子空间拟合和 Bayesian 估计的理论框架^[17,18], 给出一种抑制校正源方位偏差的幅相误差顽健校正算法, 该算法能在一定程度上克服校正源方位偏差的影响(无需将其估计), 并且也仅通过计算某实对称矩阵特征向量即可获得幅相误差的顽健估计。理论分析和仿真实验均表明, 在大样本和方位偏差较小的条件下(在有源校正中通常可以实现), 文中算法的渐近性能可达到 CRB, 并且优于 Soon 方法和 Cheng 方法的性能。

在讨论主题前, 这里定义一些符号: \otimes 和 \circ 分别表示矩阵的 Kronecker 积和 Hadamard 积(即对应元素相乘); $\text{vec}[\bullet]$ 表示矩阵向量化算子; $\text{vecd}[\bullet]$ 表示提取矩阵对角元素构成的列向量; $\text{diag}[\bullet]$ 表示用向量元素构成对角矩阵; $\text{bdiag}[\bullet]$ 表示由矩阵(或向量)作为对角元素构成的块状对角矩阵; $\text{tr}(\bullet)$ 和 $\text{det}[\bullet]$ 分别表示矩阵的迹和行列式; $\text{AsN}(\mathbf{a}, \mathbf{C})$ 表示渐近服从均值向量为 \mathbf{a} , 方差阵为 \mathbf{C} 的高斯分布; $o(\varepsilon)$ 和 $O(\varepsilon)$ 分别表示 ε 的高阶无穷小和等价无穷小, 而 $o_p(\varepsilon)$ 和 $O_p(\varepsilon)$ 在概率意义下分别与 $o(\varepsilon)$ 和 $O(\varepsilon)$ 具有相同的含义。

2 阵列信号模型和相关假设

考虑具有任意结构的 m 元阵列, 各阵元之间在幅相误差, 现在阵列远场处有 d 个不相干的校正源以平面波的方式入射, 则阵列的输出响应为

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= \sum_{k=1}^d s_k(t) \boldsymbol{\Gamma} \mathbf{a}(\theta_{0k}) + \mathbf{n}(t) \\ &= \sum_{k=1}^d s_k(t) \mathbf{b}(\theta_{0k}) + \mathbf{n}(t) \\ &= \boldsymbol{\Gamma} \mathbf{A}_0 \mathbf{s}(t) + \mathbf{n}(t) = \mathbf{B}_0 \mathbf{s}(t) + \mathbf{n}(t) \end{aligned} \quad (1)$$

式中 $\mathbf{n}(t)$ 为复圆空时高斯白噪声向量, $\mathbf{s}(t)$ 为校正源复包络向量, 这里假设它也服从时域白的复圆高斯分布, 并且与 $\mathbf{n}(t)$ 统计独立, $\mathbf{B}_0 = \boldsymbol{\Gamma} \mathbf{A}_0 = [\mathbf{b}(\theta_{01}) \quad \mathbf{b}(\theta_{02}) \quad \cdots \quad \mathbf{b}(\theta_{0d})]$ 为阵列方向矩阵, 其

中, $\mathbf{b}(\theta_{0k}) = \mathbf{\Gamma} \mathbf{a}(\theta_{0k})$ 为阵列流型向量, $\mathbf{A}_0 = [\mathbf{a}(\theta_{01}) \ \mathbf{a}(\theta_{02}) \ \cdots \ \mathbf{a}(\theta_{0d})]$ 为无幅相误差时的阵列方向矩阵, 其中, $\mathbf{a}(\theta_{0k})$ 为无幅相误差时的阵列流型向量, θ_{0k} 表示第 k 个校正源方位的标称值(即人们主观设定的信源方位值), 定义校正源方位的标称向量 $\boldsymbol{\theta}_0 = [\theta_{01} \ \theta_{02} \ \cdots \ \theta_{0d}]^T$, $\mathbf{\Gamma} = \text{diag}\{\boldsymbol{\tau}\}$ 为幅相误差对角矩阵, 其中, $\boldsymbol{\tau} = [\tau_1 \ \tau_2 \ \cdots \ \tau_m]^T$ 中的元素表示各阵元的幅相误差, 为了便于后续分析, 这里需要定义关于幅相误差的实向量 $\boldsymbol{\mu} = [\text{Re}^T\{\boldsymbol{\tau}\} \ \text{Im}^T\{\boldsymbol{\tau}\}]^T$ 。根据式(1)可知阵列协方差阵为

$$\mathbf{R}_{xx} = E[\mathbf{x}(t)\mathbf{x}^H(t)] = \mathbf{B}_0 \mathbf{R}_{ss} \mathbf{B}_0^H + \sigma^2 \mathbf{I}_m \quad (2)$$

式中 $\mathbf{R}_{ss} = E[\mathbf{s}(t)\mathbf{s}^H(t)]$ 为信源协方差阵, σ^2 为噪声功率。现对 \mathbf{R}_{xx} 进行特征分解, 则其特征值按照由大到小的顺序可假设为

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_d > \lambda_{d+1} = \lambda_{d+2} = \cdots = \lambda_m = \sigma^2 \quad (3)$$

若令上述 d 个大特征值对应的单位特征向量分别为 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots, \mathbf{e}_d$, $m-d$ 个小特征值对应的单位特征向量分别为 $\mathbf{e}_{d+1}, \mathbf{e}_{d+2}, \cdots, \mathbf{e}_m$, 并记 $\mathbf{E}_S = [\mathbf{e}_1 \ \mathbf{e}_2 \ \cdots \ \mathbf{e}_d]$ 和 $\mathbf{E}_N = [\mathbf{e}_{d+1} \ \mathbf{e}_{d+2} \ \cdots \ \mathbf{e}_m]$, 则它们张成的子空间分别称为信号子空间和噪声子空间, 相应的正交投影矩阵分别为

$$\begin{cases} \mathbf{\Pi}_S = \mathbf{E}_S \mathbf{E}_S^H = \mathbf{B}_0 \mathbf{B}_0^\dagger = \mathbf{\Pi}_{B_0} \\ \mathbf{\Pi}_N = \mathbf{E}_N \mathbf{E}_N^H = \mathbf{I}_m - \mathbf{\Pi}_S = \mathbf{I}_m - \mathbf{B}_0 \mathbf{B}_0^\dagger = \mathbf{\Pi}_{B_0}^\perp \end{cases} \quad (4)$$

在实际计算中, 由式(2)确定的理想协方差阵是无法获得的, 其误差来源有 2 个方面: 第一是有限样本的影响; 第二是校正源方位的真实值 $\boldsymbol{\theta} = [\theta_1 \ \theta_2 \ \cdots \ \theta_d]^T$ 与标称值 $\boldsymbol{\theta}_0$ 之间存在一定偏差, 此时的阵列协方差阵可表示为

$$\hat{\mathbf{R}}_{xx} = \mathbf{B} \hat{\mathbf{R}}_{ss} \mathbf{B}^H + \mathbf{B} \hat{\mathbf{R}}_{sn} + \hat{\mathbf{R}}_{sn}^H \mathbf{B}^H + \hat{\mathbf{R}}_{nn} \quad (5)$$

式中 \mathbf{B} 是将 \mathbf{B}_0 中的方位标称值替换为真实值得到的矩阵, 而其余 3 个矩阵分别为

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{R}}_{ss} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \mathbf{s}(t_n) \mathbf{s}^H(t_n) \\ \hat{\mathbf{R}}_{sn} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \mathbf{s}(t_n) \mathbf{n}^H(t_n) \\ \hat{\mathbf{R}}_{nn} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \mathbf{n}(t_n) \mathbf{n}^H(t_n) \end{cases} \quad (6)$$

式中 N 为样本点数。若对 $\hat{\mathbf{R}}_{xx}$ 进行特征分解, 则仍可得到 d 个大特征值和 $m-d$ 个小特征值, 相应的单位特征向量分别记为 $\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \cdots, \hat{\mathbf{e}}_d$ 和 $\hat{\mathbf{e}}_{d+1}, \hat{\mathbf{e}}_{d+2}, \cdots, \hat{\mathbf{e}}_m$, 若记 $\hat{\mathbf{E}}_S = [\hat{\mathbf{e}}_1 \ \hat{\mathbf{e}}_2, \cdots, \hat{\mathbf{e}}_d]$ 和 $\hat{\mathbf{E}}_N = [\hat{\mathbf{e}}_{d+1}, \hat{\mathbf{e}}_{d+2}, \cdots, \hat{\mathbf{e}}_m]$, 则相应的正交投影矩阵分别为

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{\Pi}}_S = \hat{\mathbf{E}}_S \hat{\mathbf{E}}_S^H \\ \hat{\mathbf{\Pi}}_N = \hat{\mathbf{E}}_N \hat{\mathbf{E}}_N^H = \mathbf{I}_m - \hat{\mathbf{\Pi}}_S \end{cases} \quad (7)$$

无论是有限样本或是校正源方位偏差, 它们都会影响阵列误差的校正精度, 其中, 有限样本所导致的参数估计均方误差为 $O(1/N)$ [19], 而校正源方位偏差所导致的参数估计误差为 $O(\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}_0)$ (这里 $\boldsymbol{\theta}$ 和 $\boldsymbol{\theta}_0$ 的单位均为弧度)。显然, 前者的度量具有统计意义, 因为它并不会随单次实验中阵列接收数据的不同而发生改变, 但后者的度量则是一种确定性误差, 它会随校正源真实方位数值的不同而发生改变, 因此后者缺乏统计或平均意义。然而在实际应用中, 具有统计意义的度量才是人们更为关注的, 也正因如此, 大量文献在分析阵列模型误差影响下高分辨率方位估计算法的性能时, 都将其中的模型误差假设为服从一定概率分布的随机变量, 从而推导出相应的统计度量(例如均方误差[1,2]、估计偏差[1,2]或分辨概率[3]等参数)。尽管本文与上述文献讨论的参数对象并不相同, 但分析方法相通, 由于这里所估计的参数是阵列幅相误差, 因此校正源方位偏差反而成为了一种模型误差, 于是这里不妨将真实校正源方位 $\boldsymbol{\theta}$ 看成是未知的随机变量, 并且它是在标称值 $\boldsymbol{\theta}_0$ 基础上发生随机扰动。由于校正源是人们主观控制或放置的, 因此不妨假设该随机扰动的概率分布已知, 并且是服从均值为零, 方差阵为 $\boldsymbol{\Sigma}$ 的高斯分布, 此时由校正源方位偏差所导致的参数估计均方误差为 $O(\boldsymbol{\Sigma})$ 。值得一提的是, 这里虽然将 $\boldsymbol{\theta}$ 看成是未知的随机变量, 但并非是指在单次参数估计实验中 $\boldsymbol{\theta}$ 会不停地发生变化, 在单次实验中 $\boldsymbol{\theta}$ 是保持不变的, 它的随机性仅体现在不同实验之间所发生的随机变化。

需要指出的是, 由于本文的目的是为了能够给出抑制校正源方位偏差的顽健校正算法, 从而避免对校正源方位和阵列误差参数进行联合估计, 因此这里不妨假设校正源方位偏差较小。此外, 由于文中同时考虑有限样本和校正源方位偏差的影响, 因此这里不妨认为校正源方位偏差的方差阵 $\boldsymbol{\Sigma}$ 与

$1/N$ 是可比较的, 或同一量级的, 即有 $\Sigma = O(1/N)$ 或者 $\Sigma = \bar{\Sigma}/N$, 其中, $\bar{\Sigma}$ 与 N 无关。尽管实际情况与该假设条件未必完全吻合, 但研究这种条件下的顽健校正算法是具有一定理论意义的。事实上, 对于有源校正而言, 由于校正源是人为放置, 并且对实时性的要求相对较低, 因此往往可考虑大样本或高信噪比的情况, 此时若校正源方位偏差足够小使得 $\Sigma = o(1/N)$, 即相比有限样本的影响, 校正源方位偏差的影响可近似忽略, 此时的问题在渐近意义下可近似等效为校正源方位精确已知时的幅相误差有源校正问题; 若校正源方位较大使得 $\Sigma^{-1} = o(1/N)$, 即相比有限样本的影响, 校正源方位偏差的影响占据主导, 此时不妨考虑将幅相误差和信源方位进行联合估计, 即将问题直接转化为自校正问题, 于是文中仅考虑 $\Sigma = O(1/N)$ 的情况。最后值得一提的是, 上述分析方法与文献[17]中提出的基于贝叶斯(Bayesian)准则的顽健自校正方法的分析方式类似, 文献[17]中是将阵列流型的扰动参数看作是未知的随机变量, 其最终目的是为了顽健的估计信源方位, 而本文则是将校正源方位看作是未知的随机变量, 其最终目的是为了顽健的校正阵列误差。

3 幅相误差有源校正算法

3.1 校正源方位无偏差

尽管本文的重点在于讨论校正源方位有偏差时的幅相误差顽健校正算法, 但这里有必要首先引出校正源方位精确已知时的校正算法。在高斯信源条件下, 幅相误差的渐近最优估计可通过求解如下“嵌入式”最大似然函数获得^[6,19], 即有

$$\begin{aligned} \hat{\tau}_{\text{UML}} &= \arg \min_{\tau} f_{\text{UML}}(\tau) \\ &= \arg \min_{\tau} \ln \left(\det \left(\Pi_{B_0} \hat{R}_{\text{xx}} \Pi_{B_0} + \hat{\sigma}^2 \Pi_{B_0}^{\perp} \right) \right) \end{aligned} \quad (8)$$

式中 $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{m-d} \text{tr} \left(\Pi_{B_0}^{\perp} \hat{R}_{\text{xx}} \right)$ 。显然, 式(8)中关于 τ 的形式较为复杂, 非线性程度很高, 无法给出其闭式解, 为此可通过子空间拟合理论构造如下渐近等价的目标函数^[6,19]:

$$\begin{aligned} \hat{\tau}_{\text{NSF}} &= \arg \min_{\tau} f_{\text{NSF}}(\tau) = \arg \min_{\tau} \text{tr} \left(B_0^{\text{H}} \hat{\Pi}_N B_0 U \right) \\ &= \arg \min_{\tau} \tau^{\text{H}} \left(\hat{\Pi}_N \circ (A_0 U A_0^{\text{H}})^{\text{T}} \right) \tau \end{aligned} \quad (9)$$

式中 $U = B_0^{\dagger} E_S \bar{A}_S^2 A_S^{-1} E_S^{\text{H}} B_0^{\dagger \text{H}}$ 为最优加权矩阵, 其中, $\bar{A}_S = A_S - \sigma^2 I_d$ 和 $A_S = \text{diag}[\lambda_1 \ \lambda_2 \ \dots \ \lambda_d]$ 。

式(9)中的第 2 个等式利用了矩阵恒等式 $\text{tr}(A^{\text{H}} X_1 A X_2) = \delta^{\text{H}} (X_1 \circ X_2^{\text{T}}) \delta$, 其中, $\delta = \text{vecd}[A]$ 。由于式(9)中的加权矩阵 U 也是关于 τ 的矩阵函数, 因此严格来说, 式(9)并不是关于 τ 的二次优化问题, 但 U 可用其一致估计 \hat{U} 代替, 而不影响其渐近性能, 此时式(9)就可看成是关于 τ 的二次优化问题, 并且其最优解为 Hermite 矩阵 $\hat{\Pi}_N \circ (A_0 \hat{U} A_0^{\text{H}})^{\text{T}}$ 最小特征值对应的特征向量。基于上述分析可给出如下幅相误差校正的 2 步估计算法。

步骤 1 计算 Hermite 矩阵 $\hat{\Pi}_N \circ (A_0 A_0^{\text{H}})^{\text{T}}$ 最小特征值对应的首一特征向量, 从而获得 τ 的初始且一致估计 $\hat{\tau}_0$, 基于此计算 U 的一致估计 \hat{U} 。

步骤 2 计算 Hermite 矩阵 $\hat{\Pi}_N \circ (A_0 \hat{U} A_0^{\text{H}})^{\text{T}}$ 最小特征值对应的首一特征向量, 从而获得 τ 的估计值 $\hat{\tau}_{\text{NSF}}$ 。

需要指出的是, 上述算法即为文献[6]中的 Cheng 方法(尽管表述形式不尽相同), 其中加权矩阵 U 是为了提高有限样本条件下的参数估计性能, 并使其渐近性能达到 CRB, 而当 U 取单位阵时, 即可等效为文献[5]中 Soon 方法(尽管表述形式也不尽相同)。文献[6]中的仿真实验也验证了 Cheng 方法的校正精度优于 Soon 方法, 尤其是在低信噪比和校正源时域相关性较大的情况下。

3.2 校正源方位有偏差

本节将讨论校正源方位有偏差时的情况, 根据 Bayesian 估计的理论框架^[17,18]以及第 2 节中的假设可构造关于 τ 和 θ 的“嵌入式”最大后验(MAP)估计器:

$$\begin{aligned} \{\hat{\tau}, \hat{\theta}\} &= \arg \min_{\tau, \theta} N f_{\text{UML}}(\tau, \theta) + (\theta - \theta_0)^{\text{T}} \Sigma^{-1} (\theta - \theta_0) / 2 \\ &= \arg \min_{\tau, \theta} N \ln \left(\det \left(\Pi_B \hat{R}_{\text{xx}} \Pi_B + \hat{\sigma}^2 \Pi_B^{\perp} \right) \right) + \\ &\quad (\theta - \theta_0)^{\text{T}} \Sigma^{-1} (\theta - \theta_0) / 2 \end{aligned} \quad (10)$$

显然, 式(10)中关于 τ 和 θ 的形式非常复杂, 类似于第 3.1 节, 上述 MAP 估计器可由式(11)替代而不影响其渐近性能:

$$\begin{aligned} \{\hat{\tau}, \hat{\theta}\} &= \arg \min_{\tau, \theta} \frac{N}{\sigma^2} f_{\text{NSF}}(\tau, \theta) + (\theta - \theta_0)^{\text{T}} \Sigma^{-1} (\theta - \theta_0) / 2 \\ &= \arg \min_{\tau, \theta} \frac{N}{\sigma^2} \text{tr} \left(B^{\text{H}} \hat{\Pi}_N B U \right) + (\theta - \theta_0)^{\text{T}} \Sigma^{-1} (\theta - \theta_0) / 2 \\ &= \arg \min_{\tau, \theta} \text{tr} \left(B^{\text{H}} \hat{\Pi}_N B \bar{U} \right) + (\theta - \theta_0)^{\text{T}} \bar{\Sigma}^{-1} (\theta - \theta_0) / 2 \end{aligned} \quad (11)$$

式中 $\bar{U} = \sigma^{-2}U$ 。类似于式(9)，式(11)中的 \bar{U} 也可由其一致估计值 $\hat{\bar{U}}$ 代替而不影响其渐近性能。虽然式(11)可看成是关于 τ 的二次函数，但由于未知参量 θ 的存在，使得 τ 的最优解无法直接获得。为了简化计算，这里不妨采用文献[17,18]中所谓“嵌入式”的处理方式减少未知参量的个数。注意到式(11)第 3 个等式右边第 2 项是关于 θ 的二次函数，但第 1 项相对复杂，为此可通过 Taylor 级数展开的方法将其转化为关于 θ 的二次函数，此时即可获得关于 θ 的最优闭式解，再将该闭式解代入原式中即可得到仅关于 τ 的优化函数，从而实现 θ 和 τ 的去耦合估计。首先根据矩阵恒等式 $\text{tr}(X_1 X_2 X_3 X_4) = \text{vec}^T(X_4) \cdot (X_3^T \otimes X_1) \cdot \text{vec}(X_2)$ 可将式(11)转化为

$$\{\hat{\tau}, \hat{\theta}\} = \arg \min_{\tau, \theta} \mathbf{b}^H \hat{V} \mathbf{b} + (\theta - \theta_0)^T \bar{\Sigma}^{-1} (\theta - \theta_0) / 2 \quad (12)$$

式中 $\hat{V} = \hat{U}^T \otimes \hat{\Pi}_N$ 和 $\mathbf{b} = \text{vec}(\mathbf{B})$ 。若对 \mathbf{b} 在 θ_0 处进行一阶 Taylor 展开可得

$$\mathbf{b} \approx \mathbf{b}_0 + \mathbf{D}_\theta (\theta - \theta_0) \quad (13)$$

式中

$$\begin{cases} \mathbf{b}_0 = \text{vec}(\mathbf{B}_0) \\ \mathbf{D}_\theta = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial \theta_1} \Big|_{\theta=\theta_0} & \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial \theta_2} \Big|_{\theta=\theta_0} & \cdots & \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial \theta_d} \Big|_{\theta=\theta_0} \end{bmatrix} \\ = \text{bdiag}[\dot{\mathbf{b}}(\theta_{01}), \dot{\mathbf{b}}(\theta_{02}), \cdots, \dot{\mathbf{b}}(\theta_{0d})] \end{cases} \quad (14)$$

其中， $\dot{\mathbf{b}}(\theta) = \partial \mathbf{b}(\theta) / \partial \theta$ 。将式(13)代入式(12)不难获得 θ 的最优闭式解为

$$\hat{\theta}_{\text{opt}} = \theta_0 - \hat{T}^{-1} \hat{\mathbf{i}} \quad (15)$$

式中

$$\begin{cases} \hat{T} = \text{Re}\{\mathbf{D}_\theta^H \hat{V} \mathbf{D}_\theta + \bar{\Sigma}^{-1} / 2\} \\ \hat{\mathbf{i}} = \text{Re}\{\mathbf{D}_\theta^H \hat{V} \mathbf{b}_0\} \end{cases} \quad (16)$$

再将式(13)和式(15)代入式(12)即可得仅关于 τ 的优化问题

$$\hat{\tau}_{\text{MAP-NSF}} = \arg \min_{\tau} \mathbf{b}_0^H \hat{V} \mathbf{b}_0 - \hat{\mathbf{i}}^T \hat{T}^{-1} \hat{\mathbf{i}} \quad (17)$$

显然，式(17)中的第 1 项即为 Cheng 方法的目标函数(见式(9))，第 2 项则是为了抑制校正源方位偏差。另一方面，式(17)中的向量 \mathbf{b}_0 ， $\hat{\mathbf{i}}$ 以及矩阵 \hat{T} 都是关于 τ 的函数，其中， \mathbf{b}_0 是 τ 的线性函数，而 $\hat{\mathbf{i}}$ 和 \hat{T} 是 τ 的二次函数，这是因为其中包含的 \mathbf{D}_θ 是 τ 的线性函数(见式(16))。因此式(17)并不是关于 τ

的二次函数，难以给出其闭式解，但进一步分析可知， $\hat{\mathbf{i}}$ 和 \hat{T} 中的 \mathbf{D}_θ 可由其一致估计 $\hat{\mathbf{D}}_\theta$ (即其中的 τ 替换为一致估计 $\hat{\tau}$) 代替而不影响式(17)的渐近性能，即有如下命题。

命题 1 令 $J_1 = \mathbf{b}_0^H \hat{V} \mathbf{b}_0 - \hat{\mathbf{i}}^T \hat{T}^{-1} \hat{\mathbf{i}}$ 和 $J_2 = \mathbf{b}_0^H \hat{V} \mathbf{b}_0 - \hat{\mathbf{i}}^T \hat{T}^{-1} \hat{\mathbf{i}}$ ，其中， $\hat{\mathbf{i}}$ 和 \hat{T} 是将 \mathbf{D}_θ 由其一致估计 $\hat{\mathbf{D}}_\theta$ 代替(即将 τ 替换为一致估计值 $\hat{\tau}$)，并记 $\hat{\tau}_1 = \arg \min_{\tau} J_1$ 和 $\hat{\tau}_2 = \arg \min_{\tau} J_2$ ，则有 $\lim_{N \rightarrow +\infty} \sqrt{N}(\hat{\tau}_1 - \hat{\tau}_2) = \mathbf{0}$ 或者 $\hat{\tau}_1 = \hat{\tau}_2 + o_p(1/\sqrt{N})$ 。

证明 为了便于描述，下面用幅相误差的实向量 $\boldsymbol{\mu} = [\text{Re}^T\{\tau\} \quad \text{Im}^T\{\tau\}]^T$ 代替复向量 τ 进行讨论。根据文献[19]可知这里需要证明下面 2 个关系式：

$$\begin{cases} \text{(a)} \frac{\partial J_1}{\partial \boldsymbol{\mu}(i)} - \frac{\partial J_2}{\partial \boldsymbol{\mu}(i)} = o_p(1/\sqrt{N}) \\ \text{(b)} \lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\frac{\partial^2 J_1}{\partial \boldsymbol{\mu}(i) \partial \boldsymbol{\mu}(j)} - \frac{\partial^2 J_2}{\partial \boldsymbol{\mu}(i) \partial \boldsymbol{\mu}(j)} \right) = 0 \end{cases} \quad (18)$$

首先根据矩阵恒等式 $\text{vec}(X_1 X_2 X_3) = (X_3^T \otimes X_1) \cdot \text{vec}(X_2)$ 可得

$$\hat{V} \mathbf{b}_0 = (\hat{U}^T \otimes \hat{\Pi}_N) \text{vec}(\mathbf{B}_0) = \text{vec}(\hat{\Pi}_N \mathbf{B}_0 \hat{U}) = O_p(1/\sqrt{N}) \quad (19)$$

于是有 $\hat{\mathbf{i}} = O_p(1/\sqrt{N})$ 和 $\hat{\mathbf{i}} = \hat{\mathbf{i}} + o_p(1/\sqrt{N}) = O_p(1/\sqrt{N})$ ，进一步可得

$$\hat{\mathbf{i}}^T \hat{T}^{-1} = \hat{\mathbf{i}}^T \hat{T}^{-1} + o_p(1/\sqrt{N}) = O_p(1/\sqrt{N}) \quad (20)$$

从而有

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{i}}^T \hat{T}^{-1} \frac{\partial \hat{\mathbf{i}}}{\partial \boldsymbol{\mu}(i)} = \hat{\mathbf{i}}^T \hat{T}^{-1} \text{Re} \left\{ \frac{\partial \mathbf{D}_\theta^H}{\partial \boldsymbol{\mu}(i)} \hat{V} \mathbf{b}_0 \right\} + \\ \hat{\mathbf{i}}^T \hat{T}^{-1} \text{Re} \left\{ \mathbf{D}_\theta^H \hat{V} \frac{\partial \mathbf{b}_0}{\partial \boldsymbol{\mu}(i)} \right\} \\ = \hat{\mathbf{i}}^T \hat{T}^{-1} \text{Re} \left\{ \mathbf{D}_\theta^H \hat{V} \frac{\partial \mathbf{b}_0}{\partial \boldsymbol{\mu}(i)} \right\} + O_p(1/N) \\ = \hat{\mathbf{i}}^T \hat{T}^{-1} \frac{\partial \hat{\mathbf{i}}}{\partial \boldsymbol{\mu}(i)} + o_p(1/\sqrt{N}) \\ = \hat{\mathbf{i}}^T \hat{T}^{-1} \frac{\partial \hat{\mathbf{i}}}{\partial \boldsymbol{\mu}(i)} + o_p(1/\sqrt{N}) \\ \hat{\mathbf{i}}^T \hat{T}^{-1} \frac{\partial \hat{T}}{\partial \boldsymbol{\mu}(i)} \hat{T}^{-1} \hat{\mathbf{i}} = O_p(1/N) = o_p(1/\sqrt{N}) \end{cases} \quad (21)$$

于是有

$$\frac{\partial J_1}{\partial \boldsymbol{\mu}(i)} - \frac{\partial J_2}{\partial \boldsymbol{\mu}(i)} = 2\hat{\mathbf{T}}^T \hat{\mathbf{T}}^{-1} \frac{\partial \hat{\mathbf{t}}}{\partial \boldsymbol{\mu}(i)} - 2\hat{\mathbf{t}}^T \hat{\mathbf{T}}^{-1} \frac{\partial \hat{\mathbf{t}}}{\partial \boldsymbol{\mu}(i)} + \hat{\mathbf{t}}^T \hat{\mathbf{T}}^{-1} \frac{\partial \hat{\mathbf{T}}}{\partial \boldsymbol{\mu}(i)} \hat{\mathbf{T}}^{-1} \hat{\mathbf{t}} = o_p(1/\sqrt{N}) \quad (22)$$

另一方面，因为

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{N \rightarrow +\infty} \hat{\mathbf{t}} = \lim_{N \rightarrow +\infty} \hat{\mathbf{t}} = \mathbf{0} \\ \lim_{N \rightarrow +\infty} \hat{\mathbf{T}} = \lim_{N \rightarrow +\infty} \hat{\mathbf{T}} \\ \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{\partial \hat{\mathbf{t}}}{\partial \boldsymbol{\mu}(i)} = \lim_{N \rightarrow +\infty} \operatorname{Re} \left\{ \frac{\partial \mathbf{D}_\theta^H}{\partial \boldsymbol{\mu}(i)} \hat{\mathbf{V}} \mathbf{b}_0 \right\} + \\ \lim_{N \rightarrow +\infty} \operatorname{Re} \left\{ \mathbf{D}_\theta^H \hat{\mathbf{V}} \frac{\partial \mathbf{b}_0}{\partial \boldsymbol{\mu}(i)} \right\} \\ = \operatorname{Re} \left\{ \mathbf{D}_\theta^H \mathbf{V} \frac{\partial \mathbf{b}_0}{\partial \boldsymbol{\mu}(i)} \right\} = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{\partial \hat{\mathbf{t}}}{\partial \boldsymbol{\mu}(i)} \end{array} \right. \quad (23)$$

于是有

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\frac{\partial^2 J_1}{\partial \boldsymbol{\mu}(i) \partial \boldsymbol{\mu}(j)} - \frac{\partial^2 J_2}{\partial \boldsymbol{\mu}(i) \partial \boldsymbol{\mu}(j)} \right) = 2 \lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\frac{\partial \hat{\mathbf{t}}^T}{\partial \boldsymbol{\mu}(j)} \hat{\mathbf{T}}^{-1} \frac{\partial \hat{\mathbf{t}}}{\partial \boldsymbol{\mu}(i)} - \frac{\partial \hat{\mathbf{t}}^T}{\partial \boldsymbol{\mu}(j)} \hat{\mathbf{T}}^{-1} \frac{\partial \hat{\mathbf{t}}}{\partial \boldsymbol{\mu}(i)} \right) = 0 \quad (24)$$

结合式(22)和式(24)可知式(18)成立，于是命题 1 成立，证毕。

根据命题 1 可将式(17)看成关于 $\boldsymbol{\tau}$ 的二次函数，但与式(9)不同的是，式(17)无法表示成复向量的二次型，只能表示成实向量的二次型，并且有

$$\hat{\boldsymbol{\mu}}_{\text{MAP-NSF}} = \arg \min_{\boldsymbol{\mu}} \boldsymbol{\mu}^T \operatorname{Re} \left\{ \boldsymbol{\Phi}^H \hat{\mathbf{V}} \boldsymbol{\Phi} \right\} \cdot \boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\mu}^T \hat{\mathbf{W}}^T \hat{\mathbf{T}}^{-1} \hat{\mathbf{W}} \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}^T \hat{\mathbf{M}} \boldsymbol{\mu} \quad (25)$$

式中 $\hat{\mathbf{M}} = \operatorname{Re} \left\{ \boldsymbol{\Phi}^H \hat{\mathbf{V}} \boldsymbol{\Phi} \right\} - \hat{\mathbf{W}}^T \hat{\mathbf{T}}^{-1} \hat{\mathbf{W}}$ ，其中

$$\hat{\mathbf{W}} = \operatorname{Re} \left\{ \hat{\mathbf{D}}_\theta^H \hat{\mathbf{V}} \boldsymbol{\Phi} \right\}, \quad \boldsymbol{\Phi} = \begin{bmatrix} \operatorname{diag}[\mathbf{a}(\theta_{01})] & | & i \cdot \operatorname{diag}[\mathbf{a}(\theta_{01})] \\ \operatorname{diag}[\mathbf{a}(\theta_{02})] & | & i \cdot \operatorname{diag}[\mathbf{a}(\theta_{02})] \\ \vdots & & \vdots \\ \operatorname{diag}[\mathbf{a}(\theta_{0d})] & | & i \cdot \operatorname{diag}[\mathbf{a}(\theta_{0d})] \end{bmatrix} \quad (26)$$

显然，式(25)的解 $\hat{\boldsymbol{\mu}}_{\text{MAP-NSF}}$ 即为实对称矩阵 $\hat{\mathbf{M}}$ 的最小特征值对应的特征向量，进一步可获得 $\boldsymbol{\tau}$ 的最优解 $\hat{\boldsymbol{\tau}}_{\text{MAP-NSF}}$ 。基于上述分析可给出校正源方位有偏差时的 2 步估计顽健算法。

步骤 1 利用 Cheng 方法获得 $\boldsymbol{\tau}$ 的初始且一致估计 $\hat{\boldsymbol{\tau}}_0$ ，并基于此计算 \mathbf{D}_θ 的一致估计 $\hat{\mathbf{D}}_\theta$ ；

步骤 2 计算实对称矩阵 $\hat{\mathbf{M}} = \operatorname{Re} \left\{ \boldsymbol{\Phi}^H \hat{\mathbf{V}} \boldsymbol{\Phi} \right\} - \hat{\mathbf{W}}^T \hat{\mathbf{T}}^{-1} \hat{\mathbf{W}}$ 的最小特征值对应的特征向量，从而获得实向量 $\boldsymbol{\mu}$ 的估计值 $\hat{\boldsymbol{\mu}}_{\text{MAP-NSF}}$ ，进一步得到复向量 $\boldsymbol{\tau}$ 的估计值 $\hat{\boldsymbol{\tau}}_{\text{MAP-NSF}}$ 。

与 Cheng 方法和 Soon 方法相类似，文中的顽健算法也仅是通过计算某矩阵的特征向量获得幅相误差的估计，除此以外并未带来其他繁琐的运算，因此仍保留了有源校正算法在计算量上的优势，在第 5 节的仿真实验将验证该算法对校正源方位偏差起到的抑制作用。

4 幅相误差估计的 CRB 和算法的渐近性能分析

4.1 幅相误差估计的 CRB

4.1.1 校正源方位无偏差

这里考虑校正源方位无偏差的情况，在高斯信源条件下，所有未知参量包括 $\boldsymbol{\mu}$ ， \mathbf{R}_{ss} 和 σ^2 ，它们都是确定而未知的参数，若将其中所有的实参数包含在 $\boldsymbol{\eta}$ 中，则根据文献[19]中的结论可知关于 $\boldsymbol{\eta}$ 的单样本 Fisher 信息矩阵中的元素为

$$\begin{aligned} F_\eta(i, j) &= \frac{1}{N} \operatorname{CRB}_\eta^{-1}(i, j) \\ &= \operatorname{tr} \left(\mathbf{R}_{\text{xx}}^{-1} \frac{\partial \mathbf{R}_{\text{xx}}}{\partial \boldsymbol{\eta}(i)} \mathbf{R}_{\text{xx}}^{-1} \frac{\partial \mathbf{R}_{\text{xx}}}{\partial \boldsymbol{\eta}(j)} \right) \end{aligned} \quad (27)$$

由于这里重点关心 $\boldsymbol{\mu}$ 的 CRB，而 $\boldsymbol{\mu}$ 又是方向矩阵 \mathbf{B}_0 中的未知参数，于是根据文献[20]中的结论可进一步推得仅关于 $\boldsymbol{\mu}$ 的单样本 Fisher 信息矩阵中的元素为

$$\begin{aligned} F_\mu(i, j) &= \frac{1}{N} \operatorname{CRB}_\mu^{-1}(i, j) \\ &= 2 \operatorname{Re} \left\{ \operatorname{tr} \left(\frac{\partial \mathbf{B}_0^H}{\partial \boldsymbol{\mu}(i)} \boldsymbol{\Pi}_N \frac{\partial \mathbf{B}_0}{\partial \boldsymbol{\mu}(j)} \bar{\mathbf{U}} \right) \right\} = 2 \operatorname{Re} \left\{ \frac{\partial \mathbf{b}_0^H}{\partial \boldsymbol{\mu}(i)} \mathbf{V} \frac{\partial \mathbf{b}_0}{\partial \boldsymbol{\mu}(j)} \right\} \end{aligned} \quad (28)$$

式中 $\mathbf{V} = \lim_{N \rightarrow +\infty} \hat{\mathbf{V}} = \bar{\mathbf{U}}^T \otimes \boldsymbol{\Pi}_N$ 。根据式(28)可推得 F_μ 的闭式表示为

$$F_{\mu} = 2 \left[\begin{array}{c|c} \text{Re} \left\{ \tilde{\mathbf{I}}_m \left(\Pi_N \circ (A_0 \bar{U} A_0^H)^T \right) \tilde{\mathbf{I}}_m^T \right\} & -\text{Im} \left\{ \tilde{\mathbf{I}}_m \left(\Pi_N \circ (A_0 \bar{U} A_0^H)^T \right) \tilde{\mathbf{I}}_m^T \right\} \\ \hline \text{Im} \left\{ \tilde{\mathbf{I}}_m \left(\Pi_N \circ (A_0 \bar{U} A_0^H)^T \right) \tilde{\mathbf{I}}_m^T \right\} & \text{Re} \left\{ \tilde{\mathbf{I}}_m \left(\Pi_N \circ (A_0 \bar{U} A_0^H)^T \right) \tilde{\mathbf{I}}_m^T \right\} \end{array} \right] \quad (29)$$

式中 $\tilde{\mathbf{I}}_m = [\mathbf{0}_{m-1} \quad \mathbf{I}_{m-1}]$, $\tilde{\mathbf{I}}_m$ 的出现是因为 Γ 的第一个对角元素为 1, 此时相应于该元素的 CRB 是无需考虑的。再结合矩阵恒等式

$$\left[\begin{array}{c|c} \text{Re}\{X\} & -\text{Im}\{X\} \\ \hline \text{Im}\{X\} & \text{Re}\{X\} \end{array} \right]^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} \text{Re}\{X^{-1}\} & -\text{Im}\{X^{-1}\} \\ \hline \text{Im}\{X^{-1}\} & \text{Re}\{X^{-1}\} \end{array} \right] \quad (30)$$

可得关于 μ 的 CRB 显式表示为

$$\text{CRB}_{\mu} = \frac{1}{N} \mathbf{F}_{\mu}^{-1} = \frac{1}{2N} \left[\begin{array}{c|c} \text{Re} \left\{ \left[\tilde{\mathbf{I}}_m \left(\Pi_N \circ (A_0 \bar{U} A_0^H)^T \right) \tilde{\mathbf{I}}_m^T \right]^{-1} \right\} & -\text{Im} \left\{ \left[\tilde{\mathbf{I}}_m \left(\Pi_N \circ (A_0 \bar{U} A_0^H)^T \right) \tilde{\mathbf{I}}_m^T \right]^{-1} \right\} \\ \hline \text{Im} \left\{ \left[\tilde{\mathbf{I}}_m \left(\Pi_N \circ (A_0 \bar{U} A_0^H)^T \right) \tilde{\mathbf{I}}_m^T \right]^{-1} \right\} & \text{Re} \left\{ \left[\tilde{\mathbf{I}}_m \left(\Pi_N \circ (A_0 \bar{U} A_0^H)^T \right) \tilde{\mathbf{I}}_m^T \right]^{-1} \right\} \end{array} \right] \quad (31)$$

需要指出的是, 尽管文献[6]中也讨论了幅相误差估计的 CRB, 但其中并未给出其矩阵形式的闭式表达式。

4.1.2 校正源方位有偏差

这里考虑校正源方位有偏差的情况, 相比于第 4.1.1 节, 这里需要增加考虑未知且随机的实参量 θ 。若令 $\rho = [\mu^T \quad \theta^T]^T$, 则根据文献[17,18]中的结论可知关于 ρ 的单样本 Fisher 信息矩阵中的元素为

$$\begin{aligned} F_{\rho}(i, j) &= \frac{1}{N} \text{CRB}_{\rho}^{-1}(i, j) \\ &= 2 \text{Re} \left\{ \text{tr} \left(\frac{\partial \mathbf{B}_0^H}{\partial \rho(i)} \Pi_N \frac{\partial \mathbf{B}_0}{\partial \rho(j)} \bar{U} \right) \right\} + \bar{\Sigma}^{-1}(i, j) \mathcal{A}(i, j) \\ &= 2 \text{Re} \left\{ \frac{\partial \mathbf{b}_0^H}{\partial \rho(i)} \mathbf{V} \frac{\partial \mathbf{b}_0}{\partial \rho(j)} \right\} + \bar{\Sigma}^{-1}(i, j) \mathcal{A}(i, j) \end{aligned} \quad (32)$$

式中 \mathcal{A} 是 0-1 矩阵, 并且仅在位于右下角 $d \times d$ 阶子矩阵中的元素全为 1, 其余元素全为 0。根据式(32)可知 Fisher 信息矩阵中关于 μ 的子矩阵块 $\mathbf{F}_{\mu\mu}$ 仍由式(29)表示, 但关于 θ 的子矩阵块 $\mathbf{F}_{\theta\theta}$ 可表示为

$$F_{\theta\theta} = 2 \text{Re} \left\{ \left(\dot{\mathbf{B}}_0^H \Pi_N \dot{\mathbf{B}}_0 \right) \circ \bar{U}^T \right\} + \bar{\Sigma}^{-1} = 2\mathbf{T} \quad (33)$$

式中 $\mathbf{T} = \lim_{N \rightarrow +\infty} \hat{\mathbf{T}} = \text{Re} \left\{ \mathbf{D}_{\theta}^H \mathbf{V} \mathbf{D}_{\theta} + \bar{\Sigma}^{-1} / 2 \right\}$ 和 $\dot{\mathbf{B}}_0 = [\dot{\mathbf{b}}(\theta_{01}) \quad \dot{\mathbf{b}}(\theta_{02}) \quad \cdots \quad \dot{\mathbf{b}}(\theta_{0d})]$, 而 μ 和 θ 的互矩阵块为

$$F_{\mu\theta} = F_{\theta\mu}^T = 2 \left[\begin{array}{c} \text{Re} \left\{ \tilde{\mathbf{I}}_m \left(\left(\Pi_N \dot{\mathbf{B}}_0 \right) \circ (\bar{U} A_0^H)^T \right) \right\} \\ \hline \text{Im} \left\{ \tilde{\mathbf{I}}_m \left(\left(\Pi_N \dot{\mathbf{B}}_0 \right) \circ (\bar{U} A_0^H)^T \right) \right\} \end{array} \right] \quad (34)$$

在校正源方位有偏差的情况下, μ 的 CRB 可表示为

$$\overline{\text{CRB}}_{\mu} = \frac{1}{N} \left(\mathbf{F}_{\mu\mu} - \mathbf{F}_{\mu\theta} \mathbf{F}_{\theta\theta}^{-1} \mathbf{F}_{\mu\theta}^T \right)^{-1} \quad (35)$$

利用式(29)、式(33)和式(34)即可对其进行计算, 只是这里无法给出类似于式(31)这般很简明的闭式形式。另一方面, 由于 $\mathbf{F}_{\mu\theta} \mathbf{F}_{\theta\theta}^{-1} \mathbf{F}_{\mu\theta}^T \geq \mathbf{O}$, 于是有 $\overline{\text{CRB}}_{\mu} \geq \text{CRB}_{\mu}$, 即未知参量 θ 的引入导致了幅相误差估计 CRB 的增加。

4.2 算法的渐近性能分析

当校正源方位无偏差时, 根据文献[6]和文献[19]中的结论可知 Cheng 方法是渐近有效的, 即在大样本条件下, 其性能可以达到 CRB, 因此式(31)即为 Cheng 方法的渐近性能预测值。当校正源方位有偏差时, 本节将讨论 3 个问题: 1)文中顽健算法的渐近性能预测值; 2)Cheng 方法的渐近性能预测值; 3)2 种方法的性能比较。这 3 个问题的相关结论将以如下命题的形式给出。

命题 2 将文中顽健算法的结果记为 $\hat{\mu}_{\text{Robust}}$, 则在大样本条件下满足 $\sqrt{N}(\hat{\mu}_{\text{Robust}} - \mu) \in \text{AsN}(\theta, \mathbf{C}_{\text{Robust}})$, 其中, $\mathbf{C}_{\text{Robust}} = N \overline{\text{CRB}}_{\mu}$ 。

命题 2 意味着文中顽健算法在大样本条件下的性能可达到 CRB, 即它是渐近最优的。命题 2 的证

明相对复杂, 但仔细分析可知, 文献[17]中关于方位估计顽健算法的渐近最优性的证明过程完全适用于此, 只是其中变量的物理意义不同而已, 因此这里就不再叙述, 第5节的仿真实验也将验证顽健算法的渐近最优性。

命题3 将 Cheng 方法的结果记为 $\hat{\boldsymbol{\mu}}_{\text{Cheng}}$, 则在大样本条件下满足 $\sqrt{N}(\hat{\boldsymbol{\mu}}_{\text{Cheng}} - \boldsymbol{\mu}) \in \text{AsN}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{C}_{\text{Cheng}})$, 其中

$$\mathbf{C}_{\text{Cheng}} = \mathbf{F}_{\mu\mu}^{-1} + \mathbf{F}_{\mu\mu}^{-1} \mathbf{F}_{\mu\theta} \bar{\boldsymbol{\Sigma}} \mathbf{F}_{\mu\theta}^{\text{T}} \mathbf{F}_{\mu\mu}^{-1} \quad (36)$$

限于篇幅考虑, 这里忽略命题3的证明, 第5节的仿真实验将验证其正确性。

命题4 基于命题2和命题3的定义可得 $\mathbf{C}_{\text{Robust}} \leq \mathbf{C}_{\text{Cheng}}$ 。

证明 记 $\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{F}_{\theta\theta} - \mathbf{F}_{\mu\theta}^{\text{T}} \mathbf{F}_{\mu\mu}^{-1} \mathbf{F}_{\mu\theta} - \bar{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1}$, 并令 \mathbf{F}'_{ρ} 表示在 $\boldsymbol{\theta}$ 的概率分布未知条件下, 关于向量 $\boldsymbol{\rho} = [\boldsymbol{\mu}^{\text{T}} \quad \boldsymbol{\theta}^{\text{T}}]^{\text{T}}$ 的单样本 Fisher 信息矩阵, 则 $\boldsymbol{\Omega}$ 即为 $\mathbf{F}_{\mu\mu}$ 在 \mathbf{F}'_{ρ} 中的 Schur 补矩阵^[21], 由 $\mathbf{F}'_{\rho} \geq \mathbf{O}$ 和 $\mathbf{F}_{\mu\mu} > \mathbf{O}$ 可知 $\boldsymbol{\Omega} \geq \mathbf{O}$ ^[21], 进一步得 $(\mathbf{F}_{\theta\theta} - \mathbf{F}_{\mu\theta}^{\text{T}} \mathbf{F}_{\mu\mu}^{-1} \mathbf{F}_{\mu\theta})^{-1} \leq \bar{\boldsymbol{\Sigma}}$, 再根据矩阵求逆恒等式

$$\begin{aligned} & (\mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2 \mathbf{X}_3 \mathbf{X}_4)^{-1} \\ &= \mathbf{X}_1^{-1} - \mathbf{X}_1^{-1} \mathbf{X}_2 (\mathbf{X}_3^{-1} + \mathbf{X}_4 \mathbf{X}_1^{-1} \mathbf{X}_2)^{-1} \mathbf{X}_4 \mathbf{X}_1^{-1} \end{aligned} \quad (37)$$

可得

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{\text{Robust}} &= (\mathbf{F}_{\mu\mu} - \mathbf{F}_{\mu\theta} \mathbf{F}_{\theta\theta}^{-1} \mathbf{F}_{\mu\theta}^{\text{T}})^{-1} \\ &= \mathbf{F}_{\mu\mu}^{-1} + \mathbf{F}_{\mu\mu}^{-1} \mathbf{F}_{\mu\theta} (\mathbf{F}_{\theta\theta} - \mathbf{F}_{\mu\theta}^{\text{T}} \mathbf{F}_{\mu\mu}^{-1} \mathbf{F}_{\mu\theta})^{-1} \mathbf{F}_{\mu\theta}^{\text{T}} \mathbf{F}_{\mu\mu}^{-1} \\ &\leq \mathbf{F}_{\mu\mu}^{-1} + \mathbf{F}_{\mu\mu}^{-1} \mathbf{F}_{\mu\theta} \bar{\boldsymbol{\Sigma}} \mathbf{F}_{\mu\theta}^{\text{T}} \mathbf{F}_{\mu\mu}^{-1} = \mathbf{C}_{\text{Cheng}} \end{aligned} \quad (38)$$

根据命题2至命题4可知, 当校正源方位有偏差时, 文中顽健算法在大样本条件下是渐近最优的, 并且性能优于 Cheng 方法。

5 仿真实验

在进行仿真实验前, 这里先做出几点说明: 1) 下面的仿真实验不仅比较了 Soon 方法^[5], Cheng 方法^[6]以及文中顽健算法在校正源方位有偏差时的仿真结果, 还给出 Soon 方法和 Cheng 方法在校正源方位无偏差时的仿真结果; 2) 图1至图3中的离散点表示各种算法通过仿真实验的统计结果, 而3条连续曲线则代表相应的理论预测值(曲线), 其中包括 Cheng 方法在有、无方位偏差时的性能预测值(式

(31)和式(36))以及文中顽健算法的性能预测值(式(35)), 其中根据式(31)和式(35)所给出的曲线即为相应的 CRB 曲线; 3) 图1至图7中参数估计均方根误差的数值都是进行了2000次 Monte Carlo 独立实验的统计结果; 4) 给出幅相误差估计均方根误差 ε_{τ} 的定义: 设第 m 次实验估计出的阵列幅相误差向量为 $\boldsymbol{\tau}^{(m)}$, 则有 $\varepsilon_{\tau} = \sqrt{\sum_{m=1}^{2000} \|\boldsymbol{\tau} - \hat{\boldsymbol{\tau}}^{(m)}\|_2^2 / 2000}$ 。

5.1 比较算法的幅相误差校正精度

本节将比较3种算法的幅相误差校正精度。假设阵列流型为8元均匀线阵, 相邻阵元间距为半波长, 各阵元的幅度因子分别为1.00, 0.94, 1.16, 0.86, 1.24, 1.19, 0.91和0.89, 相位误差因子分别为0.00°, -12.66°, 18.24°, -12.45°, -8.22°, 5.29°, -14.72°和-15.58°, 现有2个等功率校正源同时到达该阵列, 其方位(与线阵夹角)标称值分别为36°和60°, 校正源方位扰动方差阵为 $\boldsymbol{\Sigma} = \text{diag}[0.01 \quad 0.01]/N$ (单位为 rad²), 即有 $\bar{\boldsymbol{\Sigma}} = \text{diag}[0.01 \quad 0.01]$ 。首先固定校正源信噪比为12dB, 校正源时域相关系数为0.8, 图1给出了幅相误差估计均方根误差随样本点数的变化曲线; 接着固定样本点数为600, 校正源时域相关系数为0.8, 图2给出了幅相误差估计均方根误差随校正源信噪比的变化曲线; 最后固定校正源信噪比为12dB, 样本点数为600, 图3给出了幅相误差估计均方根误差随校正源时域相关系数的变化曲线。

从图1至图3中可以看出: 1) 当校正源方位无偏差时, Cheng 方法的性能始终优于 Soon 方法, 并且 Cheng 方法的数值统计性能与式(31)给出的理论曲线吻合得较好; 2) 当校正源方位有偏差时, Cheng 方法和 Soon 方法的性能都会受到较大影响, 而文中顽健算法的性能始终优于 Cheng 方法和 Soon 方法, 从而说明顽健算法对校正源方位偏差起到的抑制作用; 3) 当校正源方位有偏差时, Cheng 方法的数值统计性能与式(36)给出的理论曲线吻合得较好, 而文中的顽健算法的数值统计性能则与相应的 CRB 曲线(式(35))较为吻合, 只是图1中当样本点数较少以及图3中当校正源时域相关系数较大时, 顽健算法的性能与 CRB 略有差距, 这说明此时需要更多样本点数才能逼近 CRB; 4) 在上述实验条件下, 当校正源方位有偏差时, Cheng 方法的性能仍优于 Soon 方法, 尤其是在低信噪比和校正源时域相关系数较大的情况下, 但这并不意味着在校正源方位有偏差的情况下, Cheng 方法的性能会始终优于 Soon 方法(见5.2节)。

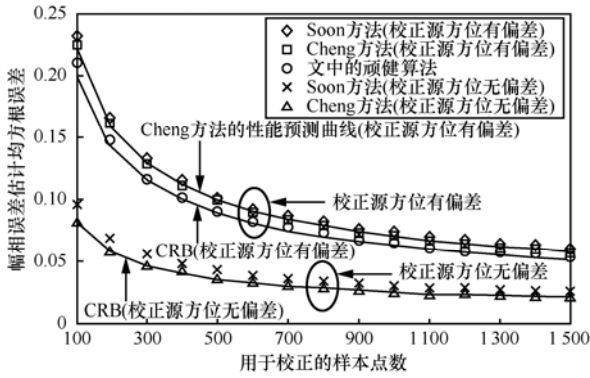


图 1 幅相误差估计均方根误差随样本点数的变化曲线

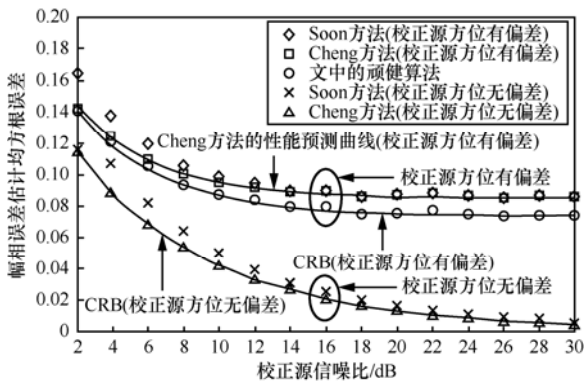


图 2 幅相误差估计均方根误差随校正源信噪比的变化曲线

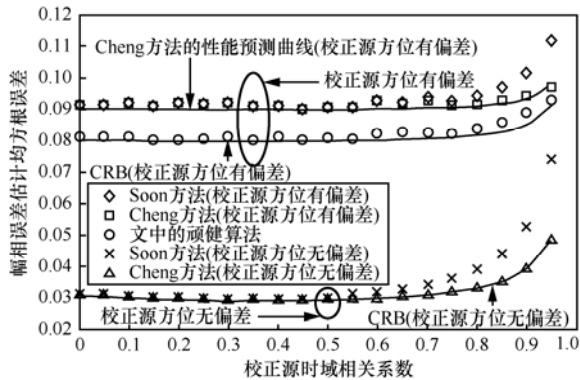


图 3 幅相误差估计均方根误差随校正源时域相关系数的变化曲线

5.2 比较算法对阵列测向性能的改善程度

本节将比较 3 种校正算法对阵列测向性能的改善程度，这也是有源校正算法性能的一种度量标准。假设阵列流型为 8 元均匀圆阵，半径与波长比为 0.9，各阵元的幅度因子分别为 1.00, 1.24, 0.77, 1.18, 1.13, 0.85, 0.74 和 1.23，相位误差因子分别为 0.00°, 9.45°, -18.35°, 18.42°, -20.54°, -17.39°, 18.24°和-18.12°，现有 2 个独立等功率且方位未知的待测信源同时到达该阵列，其方位分别为 50°和 65°，信噪比均为 10dB，利用 MUSIC 算法进行方位估计所用样本点数为 300，而在方位估计前，需要

对幅相误差进行有源校正。这里校正源设为 2 个等功率信源，方位标称值分别为 60°和 85°，校正源方位扰动方差阵仍为 $\Sigma = \text{diag}[0.01 \ 0.01]/N$ (单位为 rad^2)，即 $\bar{\Sigma} = \text{diag}[0.01 \ 0.01]$ 。首先固定校正源信噪比为 12dB，校正源时域相关系数为 0.8，图 4 给出了待测信源方位估计均方根误差随校正所用样本点数的变化曲线；接着固定校正所用样本点数为 600，校正源时域相关系数为 0.8，图 5 给出了待测信源方位估计均方根误差随校正源信噪比的变化曲线；最后固定校正源信噪比为 12dB，校正所用样本点数为 600，图 6 给出了待测信源方位估计均

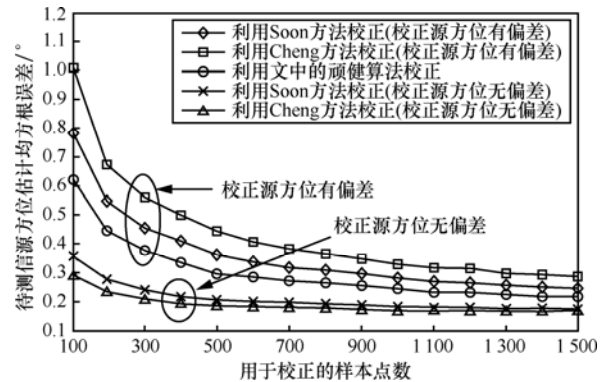


图 4 待测信源方位估计均方根误差随校正所用样本点数的变化曲线

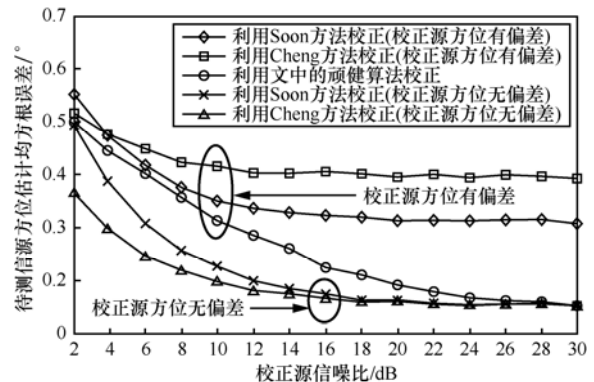


图 5 待测信源方位估计均方根误差随校正源信噪比的变化曲线

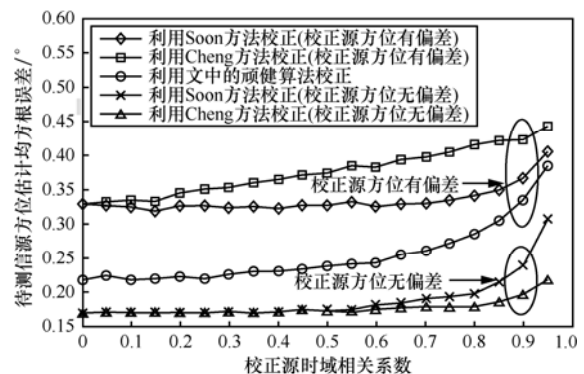


图 6 待测信源方位估计均方根误差随校正源时域相关系数的变化曲线

方根误差随校正源时域相关系数的变化曲线。

从图4至图6中可以看出: 1)当校正源方位无偏差时, 经 Cheng 方法校正后的方位估计精度明显高于 Soon 方法; 2)当校正源方位有偏差时, 经 Cheng 方法和 Soon 方法校正后的方位估计精度都受到一定影响, 并且经文中顽健算法校正后的方位估计精度明显高于这2种方法, 从而再次说明顽健算法对校正源方位偏差起到的抑制作用, 进一步仿真还发现, 在上述参数条件下, 若阵列不经校正, 直接利用 MUSIC 算法进行方位估计的均方根误差大于 3° , 因此在校正源方位有(较小)偏差的情况下, Soon 方法和 Cheng 方法仍可能较大程度地改善阵列测向精度; 3)在上述实验条件下, 当校正源方位有偏差时, 经 Cheng 方法校正后的方位估计精度不如 Soon 方法, 这一结论与第5.1节中的结论不一致, 这是因为噪声子空间拟合中的最优加权矩阵 U 仅仅是针对有限样本设计的, 当出现其他模型误差时(这里指校正源方位偏差), 该加权矩阵的作用会受到一定影响。

最后需要指出的是, 在实际的阵列测向系统中, 幅度误差对方位估计的影响相对较小, 相位误差在一定范围内对方位估计的影响有时也是可以接受的(例如方位估计均方根误差小于 0.5°), 在这种情况下, 利用文中的顽健算法进行误差校正可以进一步提高超分辨率算法的方位估计精度。下面不妨再给出一个仿真实验, 该实验中将阵列幅相误差参数设置较小, 从而使得 MUSIC 算法的方位估计均方根误差小于 0.5° 。假设阵列流型仍为8元均匀圆阵, 半径与波长比为1.2, 各阵元的幅度因子分别为1.00, 1.12, 0.89, 1.13, 0.85, 0.94, 1.14和0.98, 相位误差因子分别为 0.00° , 8.36° , -11.42° , 10.48° , -7.94° , -10.32° , 11.46° 和 -12.67° , 现有2个独立等功率且方位未知的待测信源同时到达该阵列, 其方位分别为 50° 和 75° , 信噪比均为10dB, 利用 MUSIC 算法进行方位估计所用的样本点数为300, 而在方位估计前, 仍对幅相误差进行有源校正。这里校正源设为2个独立等功率信源, 方位标称值分别为 60° 和 85° , 校正源方位扰动方差阵仍为 $\Sigma = \text{diag}[0.01 \ 0.01]/N$ (单位为 rad^2), 即 $\bar{\Sigma} = \text{diag}[0.01 \ 0.01]$, 并固定校正所用样本点数为600。图7给出了待测信源方位估计均方根误差随校正源信噪比的变化曲线。

进一步仿真可知, 在上述参数条件下, 若阵列不经校正, 直接利用 MUSIC 算法进行方位估计的均方根误差约为 0.43° (小于 0.5°), 尽管在工程应用

中, 这一精度可能可以接受, 但从图7中可以看出, 利用文中顽健算法进行误差校正可以进一步提高 MUSIC 算法的方位估计精度, 并且方位估计精度仍高于利用 Cheng 方法和 Soon 方法校正后的方位估计精度(当校正源方位有偏差时), 这进一步说明了文中顽健算法对校正源方位偏差起到的抑制作用及其在工程应用中的价值。最后需要指出的是, 由于在上述仿真条件中, 校正源是统计独立的, 因此 Cheng 方法和 Soon 方法的性能曲线几乎重合。

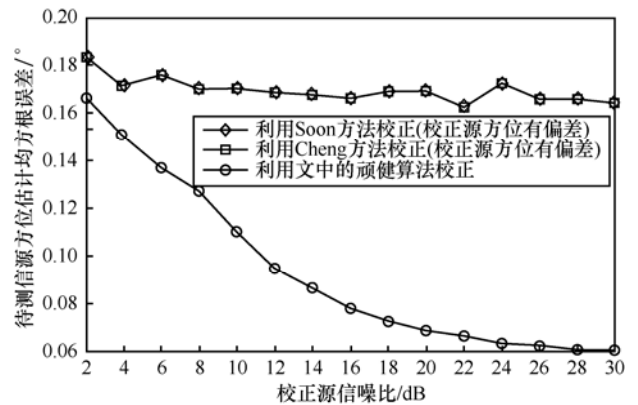


图7 待测信源方位估计均方根误差随校正源信噪比的变化曲线

6 结束语

校正源方位偏差会影响幅相误差的校正精度, 为此该文在假设校正源方位偏差的概率分布已知的条件下, 依据子空间拟合准则和 Bayesian 估计的理论框架^[17,18], 给出了一种抑制校正源方位偏差的幅相误差顽健校正算法, 该算法实现了校正源方位和幅相误差的“去耦合”估计, 能在一定程度上克服校正源方位偏差带来的影响, 并且仅通过计算某实对称矩阵的特征向量即可获得幅相误差的顽健估计。理论分析表明该顽健算法的渐近性能可逼近 CRB, 并且优于 Soon 方法^[5]和 Cheng 方法^[6]的渐近性能(当校正源方位有偏差时)。文中的仿真实验也验证了顽健算法的有效性和理论分析的正确性。最后需要指出的是, 在有源校正方法中, 校正源的时域统计特性往往能够先验获得, 但该先验特性在基于子空间方法的有源校正中难以得到利用, 这也是文中算法进一步改进和研究的方向。

参考文献:

- [1] FERRÉOL A, LARZABAL P, VIBERG M. Performance prediction of maximum-likelihood direction-of-arrival estimation in the presence of

- modeling errors[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2008, 56(10):4785-4793.
- [2] FERRÉOL A, LARZABAL P, VIBERG M. Statistical analysis of the MUSIC algorithm in the presence of modeling errors, taking into account the resolution probability[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2010, 58(8):4156-4166.
- [3] FERRÉOL A, LARZABAL P, VIBERG M. On the resolution probability of MUSIC in presence of modeling errors[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2008, 56(5):1945-1953.
- [4] FUHRMAN D R. Estimation of sensor gain and phase[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1994, 42(1):77-87.
- [5] SOON V C, TONG L, HUANG Y F, *et al.* A subspace method for estimating sensor gains and phases[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1994, 42(4):973-976.
- [6] CHENG Q, HUA Y B, STOICA P. Asymptotic performance of optimal gain-and-phase estimators of sensor arrays[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2000, 48(12):3587-3590.
- [7] 王鼎, 李长胜, 吴瑛. 基于特征向量的阵列误差矩阵最优闭式解[J]. 应用科学学报, 2009, 27(6):592-600.
WANG D, LI C S, WU Y. Optimal closed-form solution to array error matrix based on eigenvector[J]. Journal of Applied Sciences, 2009, 27(6):592-600.
- [8] 韩芳明, 张守宏, 潘复平. 阵列误差对 MUSIC 算法性能的影响与校正[J]. 西安电子科技大学学报, 2003, 30(5):585-589.
HAN F M, ZHANG S H, PAN F P. Effect of array uncertainty on the performance of MUSIC and its calibration[J]. Journal of Xidian University, 2003, 30(5):585-589.
- [9] WEISS A J, FRIEDLANDER B. Eigenstructure methods for direction finding with sensor gain and phase uncertainties[J]. Circuits Syst, Signal Processing, 1990, 9(2):272-300.
- [10] ASTÉLY D, SWINDLEHURST A, OTTERSTEN B. Spatial signature estimation for uniform linear arrays with unknown receiver gains and phases[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1999, 47(8): 2128-2138.
- [11] 王布宏, 王永良, 陈辉. 多径条件下基于加权空间平滑的阵元幅相误差校正[J]. 通信学报, 2004, 25(5):166-174.
WANG B H, WANG Y L, CHEN H. Array gain and phase calibration in the presence of multipath based on weighted spatial smoothing[J]. Journal on Communications, 2004, 25(5):166-174.
- [12] 李有明, 王让定, 文化峰. 均匀直线阵幅相误差校正的扰动分析及最优算法[J]. 电子与信息学报, 2007, 29(7):1653-1656.
LI Y M, WANG R D, WEN H F. Perturbation analysis of gain and phase error calibration for uniform linear array with optimal algorithms[J]. Journal of Electronics & Information Technology, 2007, 29(7):1653-1656.
- [13] HUNG E. A critical study of a self-calibrating direction-finding method for arrays[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1994, 42(2):471-474.
- [14] 王布宏, 王永良, 陈辉等. 方位依赖阵元幅相误差校正的辅助阵元法[J]. 中国科学 E 辑: 信息科学, 2004, 34(8):906-918.
WANG B H, WANG Y L, CHEN H, *et al.* Array calibration of angularly dependent gain and phase uncertainties with carry-on instrumental sensors[J]. Science in China Series E: Information Sciences, 2004, 34(8):906-918.
- [15] LIAO B, LIAO G S. Method for array gain and phase uncertainties calibration based on ISM and ESPRIT[J]. Journal of Systems Engineering and Electronics, 2009, 20(2): 223-228.
- [16] 王鼎, 吴瑛. 一种部分校正均匀线阵幅相误差自校正方法[J]. 现代防御技术, 2010, 38(3): 78-85.
WANG D, WU Y. A gain-phase errors self-calibration method based on partially calibrated uniform linear array[J]. Modern Defence Technology, 2010, 38(3):78-85.
- [17] VIBERG M, SWINDLEHURST A L. A Bayesian approach to auto-calibration for parametric array signal processing[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1994, 42(12):3495-3507.
- [18] WAHLBERG B, OTTERSTEN B, VIBERG M. Robust signal parameter estimation in the presence of array perturbations[A]. Proceedings of the IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing[C]. Toronto, 1991.3277-3280.
- [19] OTTERSTEN B, VIBERG M, KAILATH T. Analysis of subspace fitting and ML techniques for parameter estimation from sensor array data[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1992, 40(3):590-600.
- [20] SEE C M S, GERSHMAN A B. Direction-of-arrival estimation in partly calibrated subarray-based sensor arrays[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2004, 52(2):329-338.
- [21] 王松桂, 吴密霞, 贾忠贞. 矩阵不等式[M]. 北京: 科学出版社, 2006. 54-55.
WANG S G, WU M X, JIA Z Z. Matrix Inequality[M]. Beijing: Science Press, 2006. 54-55.

作者简介:



王鼎 (1982-), 男, 安徽芜湖人, 博士, 解放军信息工程大学讲师, 主要研究方向为阵列误差校正技术和通信中的现代信号处理。

姚晖 (1985-), 男, 江西上饶人, 解放军信息工程大学博士生, 主要研究方向为阵列信号处理。

吴瑛 (1960-), 女, 河南郑州人, 解放军信息工程大学教授、博士生导师, 主要研究方向为通信中的现代信号处理。